



## فصل چهارم-تابع نمایی

در این کاربردگ توابع نمایی و برخی ویژگی‌های آن را بیان می‌کنیم. در فصل قبل دیدیم

$$\ln : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$$

که به صورت

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

تعریف می‌شد، یک تابع صعودی اکید است. بنابراین این تابع وارون دارد و وارون آن را با نماد  $\exp$  نمایش می‌دهیم. در واقع داریم:

$$\ln u = t \iff \exp(t) = u,$$

$$\exp(\ln(x)) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+,$$

$$\ln(\exp(x)) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

### فعالیت ۱.

الف) مشتق تابع  $\exp$  را بدست آورید.

ب) نشان دهید برای هر دو عدد حقیقی  $a$  و  $b$ ،  $\exp(a+b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$ .

ج) نشان دهید برای هر عدد حقیقی  $a$  و هر عدد گویا مانند  $r$ ،  $\exp(ra) = (\exp(a))^r$ .

د) نشان دهید برای هر عدد گویا مانند  $r$ ،  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp x}{x^r} = +\infty$ .

ه) نشان دهید  $\exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$ .

و) نشان دهید به ازای هر عدد گویا مانند  $r$ ،  $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^r \exp x = 0$ .

برای عدد حقیقی و مثبت  $a$  و عدد حقیقی دلخواه  $x$ ، می‌خواهیم  $a^x$  را برحسب تابع  $\exp$  تعریف کنیم

(بازنویسی کنیم). قرار دهید  $e = \exp(1)$ . حال تعریف می‌کنیم  $e^x = \exp(x)$ . داریم:

$$e^0 = 1,$$

$$e^{(x+y)} = e^x \cdot e^y,$$

$$e^{-x} = (e^x)^{-1}.$$



فعالیت ۲. فرض کنید  $a$  و  $b$  حقیقی و مثبت،  $x$  و  $y$  عددهای حقیقی دلخواهی باشند.

الف)  $a^x$  را برحسب تابع  $\exp$  بازنویسی کنید.

ب) نشان دهید  $a^0 = 1$ .

ج) نشان دهید  $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ .

د) نشان دهید  $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$ .

ه) نمودار  $a^x$  را رسم کنید.

فعالیت ۳. فرض کنید  $a$  عددی حقیقی، مثبت و مخالف ۱ است.  $\xi = \log_a x$  عددی است که  $a^\xi = x$ .

الف)  $\log_a x$  را برحسب تابع  $\ln$  بازنویسی کنید.

ب) مشتق  $\log_a x$  را محاسبه کنید.

ج) نمودار  $\log_a x$  را رسم کنید.

#### فعالیت ۴.

الف) بانکی به سپرده‌های خود در پایان سال  $r$  درصد سود می‌دهد و بانکی در پایان هر ۶ ماه،  $\frac{r}{2}$  درصد سود می‌دهد. سرمایه‌گذاری در کدام بانک سود بیشتری دارد؟

ب) اگر بانک در پایان هر ماه  $\frac{r}{12}$  درصد سود دهد، در پایان سال چند درصد سود داده است؟

ج) اگر سوددهی بانک را در زمان به طور پیوسته در نظر بگیرید، بانک در پایان سال چند درصد سود داده است؟  
راهنمایی: در حقیقت باید حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$$

د) برای هر عدد حقیقی داده شده  $x$ ، نشان دهید

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{x}{t}\right)^t = e^x.$$

راهنمایی: تابع  $f$  را حول صفر به صورت زیر تعریف کنید و حد  $\exp(f(s))$  را وقتی  $s \rightarrow 0$  محاسبه کنید.

$$f(s) = \begin{cases} \frac{\ln(1+xs)}{s} & |s| \neq 0, \\ x & s = 0. \end{cases}$$